

离散数学

第十二章: 递推方程与生成函数

卢杨

厦门大学信息学院计算机科学与技术系

luyang@xmu.edu.cn





12.1 递推方程



递推方程

定义 12.1

给定一个数的序列 $H(0), H(1), \dots, H(n), \dots$, 简记为 $\{H(n)\}$. 一个把 $H(n)$ 和某些个 $H(i), 0 \leq i < n$, 联系起来的等式叫做关于序列 $\{H(n)\}$ 的递推方程.

例 12.1 考虑数列 $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots$, 从第3个数开始, 每一个数都等于前面相邻两个数之和. 若 $f(n)$ 代表该数列的第 n 项, $n = 0, 1, \dots$, 那么有

$$\begin{aligned}f(n) &= f(n-1) + f(n-2), \\f(0) &= 1, \\f(1) &= 1.\end{aligned}$$

上述等式是关于斐波那契数列 $f(n)$ 的递推方程和初值.

- 如何解该方程呢? 能否将该方程使用一般的函数形式来表达? 即 $f(n)$ 只与 n 相关, 而不是其他的 $f(i)$.



特征方程的根

- 首先考虑常系数线性齐次递推方程的求解.

定义 12.2

$$H(n) - a_1H(n-1) - a_2H(n-2) - \cdots - a_kH(n-k) = 0 \quad (12.1)$$

$n \geq k, a_1, a_2, \dots, a_k$ 是常数, $a_k \neq 0$

称为常系数线性齐次递推方程.

定义 12.3

$$x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \cdots - a_k = 0$$

称为递推方程12.1的**特征方程**, 它的 k 个复数根 q_1, q_2, \dots, q_k 称为递推方程的**特征根**.

- 特征方程与递推方程中的 $k + 1$ 项一一对应.
- $a_k \neq 0$, 因此0不是特征根.



递推方程的解

定理 12.1

设 q 是非零复数, 则 $H(n) = q^n$ 是递推方程12.1的一个解, 当且仅当 q 是它的特征根.

证明

$H(n) = q^n$ 是递推方程12.1的解

$$\Leftrightarrow q^n - a_1 q^{n-1} - a_2 q^{n-2} - \dots - a_k q^{n-k} = 0$$

$$\Leftrightarrow q^{n-k} (q^k - a_1 q^{k-1} - a_2 q^{k-2} - \dots - a_k) = 0$$

$$\Leftrightarrow q^k - a_1 q^{k-1} - a_2 q^{k-2} - \dots - a_k = 0 \quad (q \neq 0)$$

$$\Leftrightarrow q \text{ 是递推方程12.1的特征根}$$



斐波那契数列的解

- 斐波那契数列就这样解开了。

- 首先将其写成常系数线性齐次递推方程的形式:

$$f(n) - f(n-1) - f(n-2) = 0$$

- 其对应的特征方程为:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

- 通过韦达定理可得两个特征根为 $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

- 通过定理12.1可得 $f(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ 或 $f(n) = \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.



斐波那契数列的解

- 取其中一个 $f(n) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$, 让我们来验证一下:

$$f(0) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^0 = 1$$

$$f(1) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$f(2) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{2}$$

$$f(3) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^3 = 2 + \sqrt{5}$$

- 虽然满足了 $f(n) = f(n-1) + f(n-2)$, 但是好像哪里不太对?



递推方程的解

定理 12.2

设 $h_1(n)$ 和 $h_2(n)$ 是递推方程12.1的两个解, c_1 和 c_2 是任意常数, 则 $c_1h_1(n) + c_2h_2(n)$ 也是递推方程12.1的解.

推论

设 q_1, q_2, \dots, q_k 是递推方程**不等的**特征根, 且 c_1, c_2, \dots, c_k 为任意常数, 那么

$$H(n) = c_1q_1^n + c_2q_2^n + \dots + c_kq_k^n$$

也是递推方程12.1的解.



递推方程的解

- 可以证明，递推方程 12.1 的每个解都是 $c_1 q_1^n + c_2 q_2^n + \dots + c_k q_k^n$ 的形式，这样的解称为递推方程的**通解**.
- 给定递推方程的初值 $H(0), H(1), \dots, H(k-1)$ ，由通解就可以唯一确定，这样得到的解就是该递推方程在给定初值下的解.
- 也就是说，递推方程 12.1 有**无数个解**，但是在**给定初值下的解是唯一的**.

例 斐波那契数列 $f(n)$ 的递推方程在初值 $f(0) = 1, f(1) = 1$ 和 $f(0) = 2, f(1) = 3$ 下的解是不同的. 虽然后者就不叫斐波那契数列了.



斐波那契数列的解

例 斐波那契数列的递推方程是:

$$f(n) - f(n-1) - f(n-2) = 0.$$

该递推方程的特征方程是 $x^2 - x - 1 = 0$, 特征根是

$$x_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, x_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2},$$

所以通解是

$$f(n) = c_1 \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n$$



斐波那契数列的解

代入初值 $f(0) = 1, f(1) = 1$, 得到方程组

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 1 \\ \frac{1 + \sqrt{5}}{2} c_1 + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} c_2 = 1 \end{cases}$$

解得

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1 + \sqrt{5}}{2}, c_2 = -\frac{1}{\sqrt{5}} \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

所以斐波那契数列的解是

$$f(n) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}$$



递推方程的解

- 当递推方程的特征根有**重根**的时候, $H(n) = c_1q_1^n + c_2q_2^n + \cdots + c_kq_k^n$ 不是递推方程的通解.

定理 12.3

设 q_1, q_2, \dots, q_t 是递推方程

$$H(n) - a_1H(n-1) - a_2H(n-2) - \cdots - a_kH(n-k) = 0, \quad n \geq k, a_k \neq 0$$

的不等的特征根, 且 q_i 的重数是 $e_i, i = 1, 2, \dots, t$. 令 $c_{i1}, c_{i2}, \dots, c_{ie_i}$ 是任意常数, 且

$$H_i(n) = (c_{i1} + c_{i2}n + \cdots + c_{ie_i}n^{(e_i-1)})q_i^n$$

那么 $H(n) = \sum_{i=1}^t H_i(n)$ 是递推方程的通解.



递推方程的解

例 12.3 若递推方程的特征方程是

$$x^4 + x^3 - 3x^2 - 5x - 2 = 0,$$

它的特征根是 $-1, -1, -1, 2$. 根据定理12.3, 该递推方程的通解是

$$H(n) = c_1(-1)^n + c_2 n(-1)^n + c_3 n^2(-1)^n + c_4 2^n$$



递推方程的解

下面考虑常系数线性**非齐次**递推方程, 它的一般形式是

$$H(n) - a_1H(n-1) - a_2H(n-2) - \cdots - a_kH(n-k) = f(n), \\ n \geq k, a_k \neq 0, f(n) \neq 0$$

定理 12.4

设 $\bar{H}(n)$ 是常系数线性**齐次**递推方程

$$H(n) - a_1H(n-1) - a_2H(n-2) - \cdots - a_kH(n-k) = 0, \\ n \geq k, a_k \neq 0$$

的**通解**, $H^*(n)$ 是其对应的**非齐次**递推方程的一个**特解**, 则

$$H(n) = \bar{H}(n) + H^*(n)$$

是该非齐次递推方程的**通解**.



递推方程的解

- 那么, 常系数线性**非齐次**递推方程的**特解**该如何求呢?
- 一般特解的函数形式与 $f(n)$ 有关.
- 例如, 当 $f(n)$ 是 n 的 t 次多项式时, 一般情况下可以设特解 $H^*(n)$ 也是 n 的 t 次多项式.



递推方程的解

例 12.4 求以下递推方程的一个特解

$$H(n) + 5H(n-1) + 6H(n-2) = 3n^2$$

解 $f(n)$ 是2次多项式, 因此可设特解形式为

$$H^*(n) = q_1 n^2 + q_2 n + q_3,$$

其中 q_1, q_2, q_3 为待定系数. 代入原式并化简后可得

$$12q_1 n^2 + (-34q_1 + 12q_2)n + (29q_1 - 17q_2 + 12q_3) = 3n^2,$$

让每个多项式系数为0即可得到一组特解:

$$\begin{cases} 12q_1 = 3 \\ -34q_1 + 12q_2 = 0 \\ 29q_1 - 17q_2 + 12q_3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{解得 } q_1 = \frac{1}{4}, q_2 = \frac{17}{24}, q_3 = \frac{115}{288}.$$



递推方程的解

- 设特解 $H^*(n)$ 是 n 的 t 次多项式也有失败的时候.

例 12.5 求解递推方程的一个特解.

$$H(n) - H(n - 1) = 7n.$$

解 $f(n)$ 是1次多项式, 因此可设特解形式为

$$H^*(n) = q_1n + q_2,$$

代入原式并化简可得 $q_1 = 7n$. 这里解不出 q_1 , 因为等式左边含 n 的项被消去了. 为此需要把特解中 n 的最高次幂提高, 例如设

$$H^*(n) = q_1n^2 + q_2n + q_3,$$

代入化简后得到

$$2q_1n + q_2 - q_1 = 7n,$$

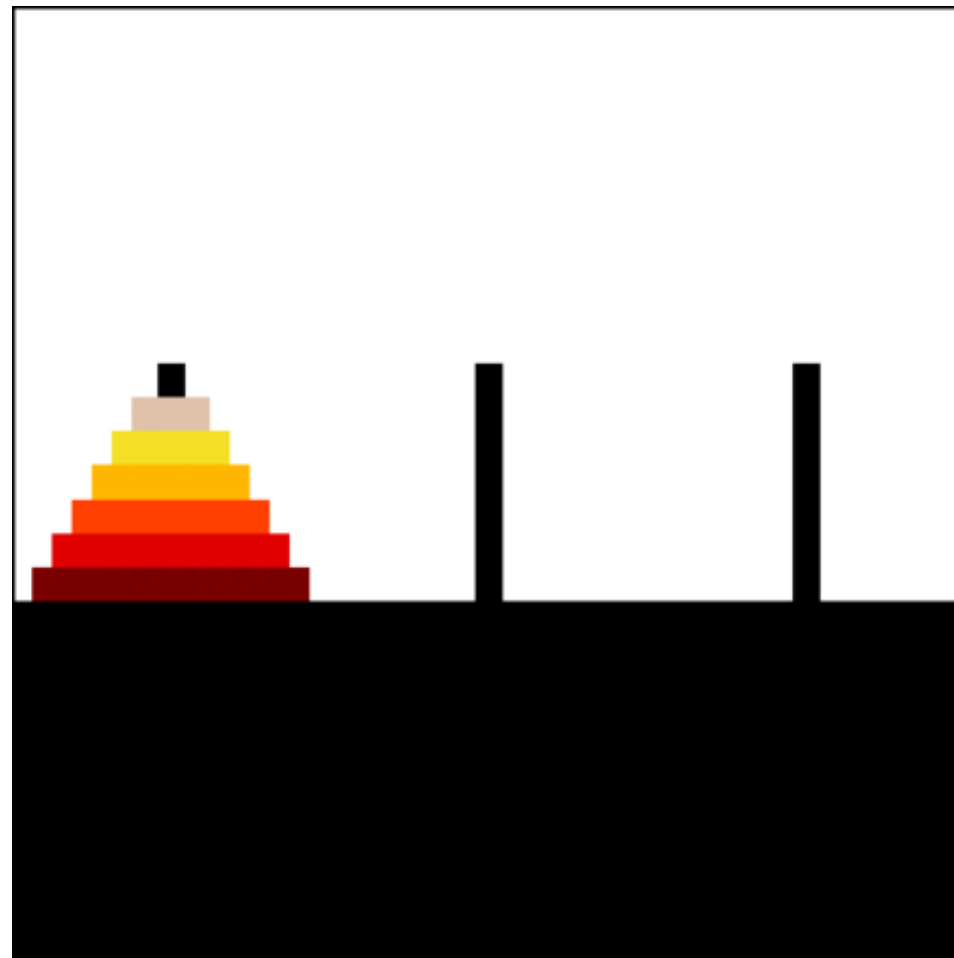
解得 $q_1 = q_2 = \frac{7}{2}$.



汉诺塔问题

例 12.6 汉诺塔问题

- 有 A, B, C 三根柱子. n 个圆盘按照从大到小的顺序依次套在 A 柱上, 图中的 $n = 6$.
- 现在要把它们移到 C 柱上.
- 如果每次只允许移动一个盘子, 并且不允许大盘压在小盘上面, 设计一个移动的算法, 并计算算法的移动次数.



汉诺塔问题

- 可设计一个递归算法.

- 令递归函数 $\text{Hanoi}(n, X, Y, Z)$ 表示把 n 个盘子从 X 柱移动到 Y 柱, 中间可利用 Z 柱.
- 令函数 $\text{move}(X, Y)$ 表示把一个盘子从 X 柱移动到 Y 柱的操作.

```
function Hanoi(n, A, C, B)
    if n=1
        move(A, C)
    else
        Hanoi(n-1, A, B, C)
        move(A, C)
        Hanoi(n-1, B, C, A)
```



汉诺塔问题

- 于是可得到关于移动次数的递推方程:

$$T(n) = 2T(n - 1) + 1, n > 1$$

$$T(1) = 1$$

- 这是一个常系数线性非齐次递推方程, 首先求其对应的齐次递推方程 $T(n) - 2T(n - 1) = 0$ 的通解, 即对应特征方程的特征根:

$$x - 2 = 0$$

- 解得 $x = 2$, 所以通解的形式为:

$$\bar{T}(n) = c2^n.$$



汉诺塔问题

- 根据定理12.4, 再求该非齐次方程的特解.

- 该方程为0次多项式, 可直接设特解形式为

$$T^*(n) = q.$$

- 代入可得

$$q = 2q + 1,$$

解得 $q = -1$.

- 通过定理12.4可得该非齐次递推方程的通解为:

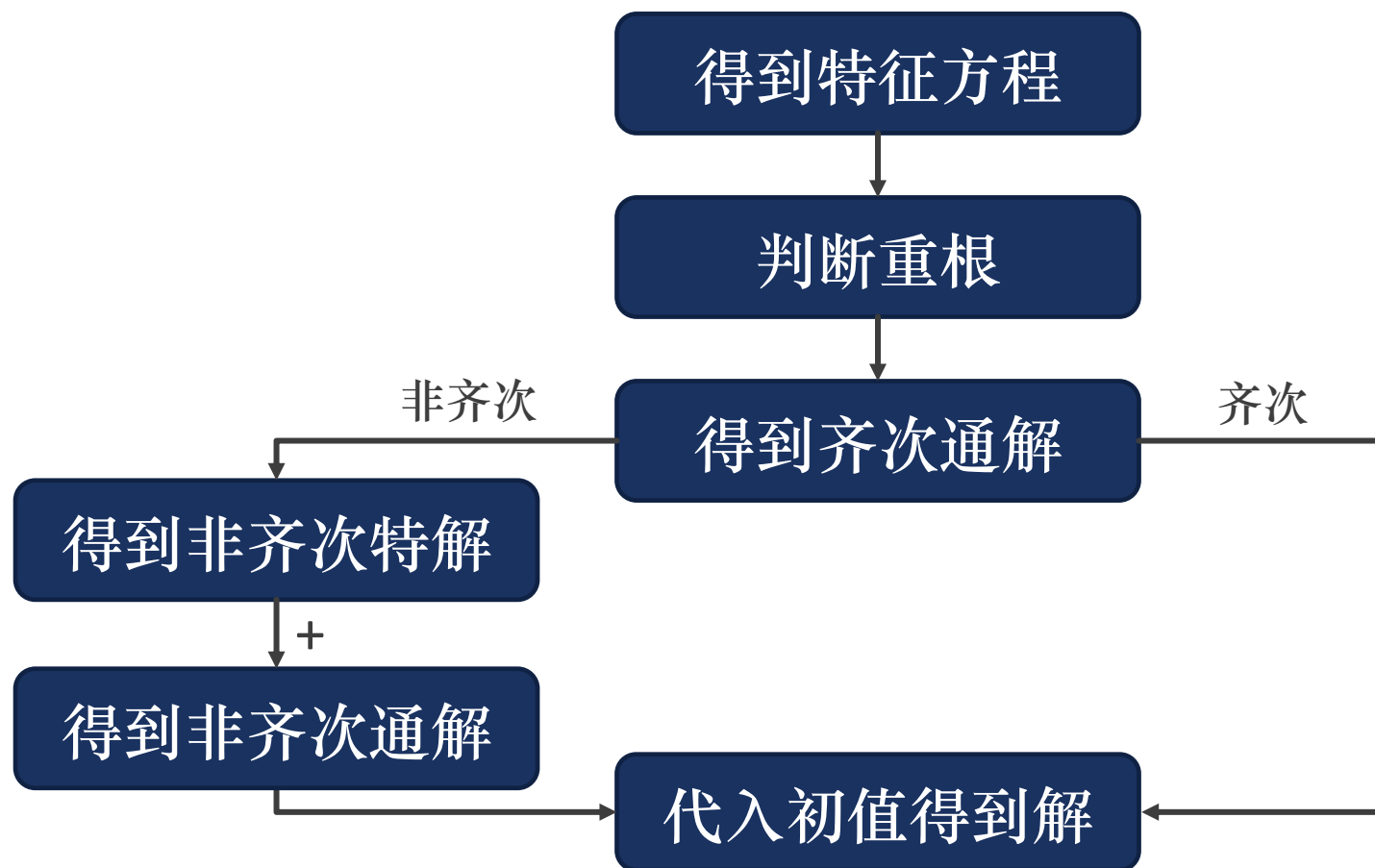
$$T(n) = \bar{T}(n) + T^*(n) = c2^n - 1.$$

- 代入初值 $T(1) = 1$ 可确定常数 $c = 1$, 从而得到

$$T(n) = 2^n - 1.$$



求解递推方程的通用步骤



课堂练习

求解递推方程

$$\begin{cases} H(n) + 6H(n-1) + 9H(n-2) = 3, \\ H(0) = 0, \\ H(1) = 1. \end{cases}$$



课堂练习

解

- 首先求对应的齐次递推方程的特征方程的解:

$$x^2 + 6x + 9 = 0$$

解得 $x_1 = x_2 = -3$, 有重根, 因此使用定理12.3, 齐次通解为

$$\bar{H}(n) = c_1(-3)^n + c_2n(-3)^n.$$

- 由于 $f(n) = 3$, 设特解 $H^*(n) = q$, 代入后得到

$$q + 6q + 9q = 3,$$

解得 $H^*(n) = 3/16$.

- 因此原递推方程的通解为

$$H(n) = \bar{H}(n) + H^*(n) = c_1(-3)^n + c_2n(-3)^n + \frac{3}{16}.$$

- 代入初值得 $c_1 = -\frac{3}{16}$, $c_2 = -\frac{1}{12}$.



12.2 生成函数与指数生成函数

生成函数

- 生成函数与数列有着密切的联系.
- 通过生成函数可以求解递推方程和组合计数问题.

定义 12.4

设 $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ 是一个数列, 简记作 $\{a_n\}$, 则

$$G(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots,$$

称为数列 $\{a_n\}$ 的生成函数.



生成函数

例 设 m 为给定正整数, 组合数序列 $\binom{m}{0}, \binom{m}{1}, \dots, \binom{m}{n}, \dots$ 的生成函数是

$$G(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n = \sum_{n=0}^m \binom{m}{n} x^n = (1+x)^m,$$

正好是二项式定理的结果, 因为组合数恰好是二项式系数.



生成函数在组合计数中的应用

- 生成函数在组合计数中有着重要的应用.
- 考虑多重集 $S = \{\infty \cdot a_1, \infty \cdot a_2, \dots, \infty \cdot a_k\}$, S 的 r 组合数是 $\binom{k+r-1}{r}$.
- 考虑多重集 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$, 如果 $r \leq n_1, n_2, \dots, n_k$, S 的 r 组合数也是 $\binom{k+r-1}{r}$.
- 若存在某个 $n_i < r$, S 的 r 组合数就无法使用计数公式, 这时候就可以使用生成函数的方法求解.



生成函数在组合计数中的应用

- 考查以下函数

$$G(y) = (1 + y + y^2 + \dots + y^{n_1})(1 + y + y^2 + \dots + y^{n_2}) \dots \\ (1 + y + y^2 + \dots + y^{n_k}),$$

它展开后的各项都是如下形式:

$$y^{x_1}y^{x_2} \dots y^{x_k} = y^{x_1+x_2+\dots+x_k}.$$

其中 y^{x_i} 来自第 i 个因式 $(1 + y + y^2 + \dots + y^{n_i})$ 中的某一项.

- $x_1 + x_2 + \dots + x_k = r$ 时, $G(y)$ 中 y^r 的系数是**该方程的非负整数解**, 也就是我们想要的 **r 组合数**.
- 因此, 通过这种方式构造的生成函数 $G(y)$ 所对应的数列 $\{a_r\}$ 就是 r 组合数的数列.



生成函数在组合计数中的应用

定理

设多重集 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$, 对任意的非负整数 r , 令 a_r 为 S 的 r 组合数, 数列 $\{a_r\}$ 的生成函数为 $G(x)$, 则

$$G(x) = f_{n_1}(x) \cdot f_{n_2}(x) \cdot \dots \cdot f_{n_k}(x),$$

其中

$$f_{n_i}(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{n_i}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

■ 在这种构造下, $G(x)$ 可以写成以下形式:

$$G(x) = 1 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots + a_r x^r + \dots$$



生成函数在组合计数中的应用

例 12.11 求 $S = \{3 \cdot a, 4 \cdot b, 5 \cdot c\}$ 的 3 组合数和 10 组合数.

解

- 3 组合数满足 $3 \leq 3, 4, 5$ 的条件, 因此可以直接使用计数公式

$$\binom{3+3-1}{3} = 10.$$

- 10 组合数则需要使用生成函数. 设 S 的 r 组合数为 a_r , $\{a_r\}$ 的生成函数是

$$\begin{aligned} G(y) &= (1 + y + y^2 + y^3)(1 + y + y^2 + y^3 + y^4) \\ &\quad (1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5) \\ &= (1 + 2y + 3y^2 + 4y^3 + 4y^4 + 3y^5 + 2y^6 + y^7) \\ &\quad (1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5) \end{aligned}$$

- 上式中 y^{10} 的系数为 $3 + 2 + 1 = 6$, 所以 $a_r = 6$.



生成函数在组合计数中的应用

- 对于多重集 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$ 的 r 排列数, 只有当 $r = n_1 + n_2 + \dots + n_k$ 时有全排列的计数公式

$$\binom{r}{n_1 n_2 \dots n_k}$$

- 对于不满足该条件的一般 r 排列的计数, 就需要用到指数生成函数.

定义 12.6

设 $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ 是一个数列, 简记作 $\{a_n\}$, 它的指数生成函数记作 $G_e(x)$, 且

$$G_e(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}.$$



生成函数在组合计数中的应用

定理 12.6

设多重集 $S = \{n_1 \cdot a_1, n_2 \cdot a_2, \dots, n_k \cdot a_k\}$, 对任意的非负整数 r , 令 a_r 为 S 的 r 排列数, 数列 $\{a_r\}$ 的指数生成函数为 $G_e(x)$, 则

$$G_e(x) = f_{n_1}(x) \cdot f_{n_2}(x) \cdot \dots \cdot f_{n_k}(x),$$

其中

$$f_{n_i}(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^{n_i}}{n_i!}, \quad i = 1, 2, \dots, k.$$

■ 在这种构造下, $G_e(x)$ 可以写成以下形式:

$$G_e(x) = 1 + a_1 x + a_2 \frac{x^2}{2!} + a_3 \frac{x^3}{3!} + \dots + a_r \frac{x^r}{r!} + \dots$$



生成函数在组合计数中的应用

例 12.4 求 $S = \{2 \cdot a, 3 \cdot b\}$ 的 5 排列数, 4 排列数.

解

- 5 排列数满足 $2 + 3 = 5$ 的条件, 因此可以直接使用计数公式

$$\binom{5}{2 \ 3} = \frac{5!}{2!3!} = 10.$$

- 设 S 的排列数为 a_r , $\{a_r\}$ 的指数生成函数是

$$\begin{aligned} G_e(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}\right) \\ &= 1 + 2x + 4 \cdot \frac{x^2}{2!} + 7 \cdot \frac{x^3}{3!} + 10 \cdot \frac{x^4}{4!} + 10 \cdot \frac{x^5}{5!} \end{aligned}$$

因此有 $a_4 = 10$, 同时也可以验证 $a_5 = 10$.



多重集组合计数小结

排列:

- 如果 $n_i \geq r$, r 排列数为 k^r .
- 如果 $n_1 + n_2 + \cdots + n_k = n$, 全排列数为 $\binom{n}{n_1 n_2 \dots n_k}$.
- 对任意的非负整数 r , r 排列数可以使用指数生成函数求解.

组合:

- 如果 $n_i \geq r$, r 组合数是 $\binom{k+r-1}{r}$.
- 对任意的非负整数 r , r 组合数可以使用生成函数求解.

课堂练习

用多重集 $\{1,1,2,3,3,4\}$ 中的数字能构成多少个不同的四位数?



课堂练习

用多重集 $\{1,1,2,3,3,4\}$ 中的数字能构成多少个不同的四位数?

解 所求的四位数是多重集 $S = \{2 \cdot 1, 1 \cdot 2, 2 \cdot 3, 1 \cdot 4\}$ 的4排列.

■ 设 S 的排列数为 a_r , $\{a_r\}$ 的指数生成函数是

$$\begin{aligned} G_e(x) &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) (1 + x) \left(1 + x + \frac{x^2}{2!}\right) (1 + x) \\ &= \left(1 + x + x + x^2 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{2!}\right)^2 \\ &= \left(1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3\right)^2 \end{aligned}$$



课堂练习

- 不需要全部算出来, 找出 $\frac{x^4}{4!}$ 的系数即可:

$$2 \cdot 2x \cdot \frac{x^3}{2} + \frac{3}{2}x^2 \cdot \frac{3}{2}x^2$$

- x^4 的系数是 $2 + \frac{9}{4} = \frac{17}{4}$.
- 所以 $\frac{x^4}{4!}$ 的系数是 $\frac{17}{4} \cdot 4! = 102$.
- 可以和例11.5的方法进行对比.



课堂练习

游戏绝地求生中有头盔和防弹衣, 分别分为3个等级:

- 头盔: 一级头, 二级头, 三级头.
- 护甲: 一级甲, 二级甲, 三级甲.

在游戏中一开始什么都没有, 但是会在路上随机捡取装备. 假设规定高级装备可以覆盖低级装备, 也可以直接穿上, 但是穿上高级装备后就无法再穿回低级装备. 那么从什么都没有, 到穿上三级头和三级甲, 一共有多少种方式?

例如

- 一级头->二级甲->三级甲->三级头
- 三级头->三级甲
- ...



课堂练习

- 如果只考虑头盔, 那么穿上 i 级头有 2^{i-1} 种方式. 因为 i 级头一定要穿上, 但是 $1, \dots, i-1$ 级头都可以选择穿与不穿.
- 当穿上 i 级头和 j 级甲时, 可以分解为两种情况:
 - 已经穿上 j 级甲了, 就差 i 级头了, 这时候捡到 i 级头了.
 - 已经穿上 i 级头了, 就差 j 级甲了, 这时候捡到 j 级甲了.
- 因此, 假设 $H(i, j)$ 为穿上 i 级头和 j 级甲的方式数, 该问题的递推方程可以写为:

$$H(i, j) = \sum_{k < i} H(k, j) + \sum_{k < j} H(i, k), i > 0, j > 0$$

$$H(i, j) = 2^{i-1}, i = 0 \text{ 或 } j = 0$$



课堂练习

	$i = 0$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
$j = 0$	0	1	2	4
$j = 1$	1	2	5	12
$j = 2$	2	5	14	37
$j = 3$	4	12	37	106



作业

p204

1

4

5

7

11

16

p222

1 (1)(3)

3

8

13

17



谢谢

有问题欢迎随时跟我讨论

